

文章编号: 1000-7598 (2009) 06-1635-04

岩石疲劳损伤模型的参数估计方法研究

肖建清^{1,2}, 丁德馨³, 蒋复量^{1,3}, 徐 根¹

(1. 中南大学 资源与安全工程学院, 长沙 410083; 2. 南华大学 数理学院, 衡阳 421001; 3. 南华大学 核资源与安全工程学院, 衡阳 421001)

摘 要: 岩石是一种非均质的复杂地质材料, 其疲劳损伤演化具有明显的 3 阶段发展规律。倒 S 型非线性疲劳累积损伤模型可以很好地描述这一规律。应用倒 S 型模型开展损伤计算和疲劳寿命分析的先决条件是确定出不同应力水平下的模型参数, 而运用 Levenberg-Marquardt 法进行倒 S 型曲线拟合的结果表明, 不用任何优化方法而随意选取参数初始值时迭代收敛到最优解的概率很低。因此, 提出运用有限组合法估算初始值, 即在参数可行域中均匀布点, 以这些点为起始点分别实施一次 Levenberg-Marquardt 优化计算, 取残差平方和最小的一组参数作为第 2 次 Levenberg-Marquardt 拟合计算的初始值。试验结果表明, 以有限组合法估算参数初始值, Levenberg-Marquardt 迭代计算总能收敛到最优解。

关 键 词: 曲线拟合; Levenberg-Marquardt 法; 有限组合法; 疲劳累积损伤

中图分类号: O346; O221

文献标识码: A

Parameter estimation method of fatigue damage model of rock

XIAO Jian-qing^{1,2}, DING De-xin³, JIANG Fu-liang^{1,3}, XU Gen¹

(1. School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Mathematical and Physical Sciences, University of South China, Hengyang 421001, China; 3. School of Nuclear Resources and Safety Engineering, University of South China, Hengyang 421001, China)

Abstract: Rock is a complex heterogeneous geological material with three-phase law in fatigue damage evolution. This law can be described well by inverted S-shaped nonlinear fatigue cumulative model. The parameters of this model under different stress levels must be determined before using it to calculate damage or analyze fatigue life. However, the calculating result indicates that the probability is very low for Levenberg-Marquardt method converging to optimal solution with arbitrary initial parameters. Therefore, a finite combination method is proposed to estimate initial parameters for Levenberg-Marquardt calculation. Initial points uniformly distributed in the feasible region of parameters are inputted for Levenberg-Marquardt calculation; and the set of parameters with minimum residual sum of squares is taken as final initial parameters. The results show that the set of initial parameters estimated by finite combination method is always effective for Levenberg-Marquardt method converging to optimal solution.

Key words: curve fitting; Levenberg-Marquardt method; finite combination method; fatigue cumulative damage

1 前 言

曲线拟合是指用连续曲线近似地刻画或比拟平面上离散点组所表示的坐标之间函数关系的一种数据处理方法, 即用解析表达式逼近离散数据的一种方法。对于线性模型一般通过建立和求解正则方程组来确定参数, 从而求得拟合曲线。至于非线性模型, 有些通过变量变换可以化为线性模型, 称为外在非线性; 而大部分不能通过变量变换化为线性模型, 通称为内在非线性。对于后者一般要用迭代法进行拟合计算。

Gauss-Newton 最小二乘迭代法^[1-3]是应用最为广泛的一种曲线拟合方法, 这种方法很大程度上依赖于初值的选择, 如果初值选择不当, 此方法可能因为不收敛或收敛极慢而失效。而且 Jacobian 矩阵的奇异以及坏条件都会引起 Gauss-Newton 法数值上的困难。

Levenberg-Marquardt 通过在正则方程中引入参数 μ , 修正了 Gauss-Newton 法的缺陷, 保证了迭代的顺利进行。但是, Levenberg-Marquardt 法作为局部搜索优化方法中的一种, 初值的选择问题仍然是计算能否收敛到最优解的关键所在。

收稿日期: 2008-08-05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 50774047); 湖南省教育厅基金项目 (No. 07C652, 08C764); 湖南省安监局基金项目 (No. 07-17, 07-29)。
第一作者简介: 肖建清, 男, 1978 年生, 博士生, 讲师, 主要从事岩石力学和工程方面的科研与教学工作。

2 倒S型非线性疲劳累积损伤模型

文献[4-8]的研究表明,对于岩石这样一类极不均质的地质材料,传统的以 $S-N$ 曲线为基础的疲劳分析方法很难直接借用。文献[4-5]得出,尽管岩石的疲劳寿命离散性很大,但其轴向不可逆变形的 3 阶段发展规律(如图 1)是普遍存在的统一规律。文献[4]根据应力水平将 3 阶段发展规律曲线分为三种基本类型,如图 2 所示。曲线 c 对应于高上限应力比大幅值的疲劳加载情形;曲线 a 对应于上限应力比低于门槛值的情形,这是 2 种极限状态;而大多数疲劳试验都可观测到 b 类型的 3 阶段规律。

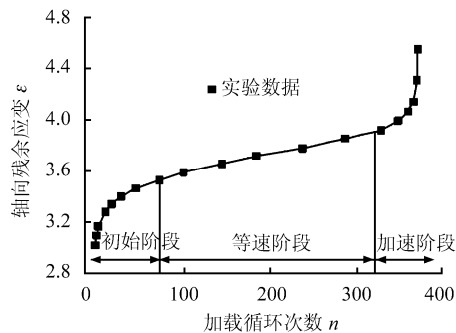


图 1 轴向不可逆变形发展曲线

Fig.1 Development curve of axial irreversible deformations

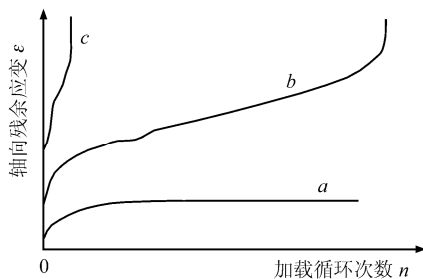


图 2 3 阶段曲线的分类

Fig.2 Classification of three-phase curves

作者根据这一研究成果,提出了倒 S 型非线性疲劳累积损伤模型^[9],其数学表达式如下:

$$D = D_0 + \alpha \left(\frac{-\beta}{n - \beta} - 1 \right)^{1/p} \quad (1)$$

式中: n 为自变量,称为广义循环,可以取绝对循环 n ,相对循环 n/N ,也可以取对数循环 $\ln(n)$; D 为因变量,指材料等幅循环 n 个周期所对应的损伤。倒 S 型模型的曲线族如图 3 所示。

由此可见,倒 S 型模型涵盖了岩石损伤累积曲线的各种类型。因此,用倒 S 型曲线拟合岩石的损伤演化可以达到非常理想的效果。而且作者也论述了模型对材料初始损伤、载荷间相互作用、加载次

序效应的考虑。理论分析表明,该模型既可用于等幅加载,亦可直接用于变幅加载和随机加载时的损伤计算和寿命分析。

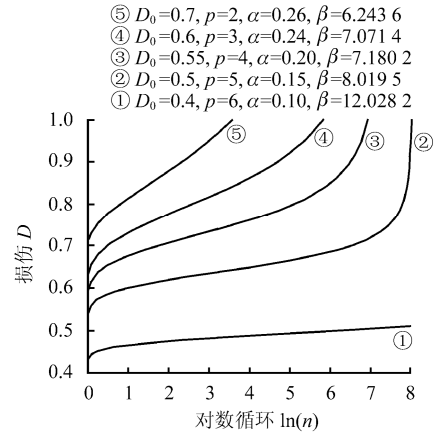


图 3 倒 S 型曲线族

Fig.3 Inverted S-shaped curves family

3 Levenberg-Marquardt 法

岩石倒 S 型非线性疲劳累积损伤模型参数估算可转换为如下的非线性最小二乘问题,

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[d_i - d_0 - \alpha \left(\frac{-\beta}{n_i - \beta} - 1 \right)^{\frac{1}{p}} \right]^2 \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[x_{2i} - p_0 - p_1 \left(\frac{-p_2}{x_{1i} - p_2} - 1 \right)^{\frac{1}{p_3}} \right]^2 = \frac{1}{2} r(x)^T r(x) \\ \text{s.t. } 0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 < p_1 < (1 - D_0) \quad 2 \leq p_3 \leq 8 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $r(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x))^T$ 为残量函数。因为函数 $r(x)$ 二阶连续可微,因此,其 Gauss-Newton 迭代公式如下:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)} \quad (3)$$

式中: $\delta^{(k)}$ 为 $x^{(k)}$ 向最优解趋近的修正量,其数值通过求解正则方程组 $J_k^T J_k \delta = -J_k^T r_k$ 得到, J_k 为 $f(x)$ 的 Jacobian 矩阵。Gauss-Newton 法要求非线性最小二乘问题在点 $x^{(k)}$ 处的 Jacobin 矩阵 J_k 列满秩,否则 Gauss-Newton 法无法定义,遗憾的是, J_k 奇异的情形常常发生。另外当 J_k 坏条件时, Gauss-Newton 步 $\delta^{(k)}$ 可能会很长,而引起数值上的困难。为了克服这些困难, Levenberg-Marquardt 修正了正则方程组:

$$(J_k^T J_k + \mu I) \delta = -J_k^T r_k \quad (4)$$

Levenberg-Marquardt 方法在正则方程中引入参数 μ 。由于矩阵 $J_k^T J_k$ 至少半正定, 对于任何非 0 正数 μ , 矩阵 $J_k^T J_k + \mu I$ 非奇异 (正定), 因而有唯一解。当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $\delta^{(k)}$ 趋于 Gauss-Newton 步, 当 $\mu \rightarrow \infty$ 时, $\delta^{(k)}$ 趋于最速下降步。因此, μ 不仅影响了试探步 $\delta^{(k)}$ 的方向, 而且影响了 $\delta^{(k)}$ 的大小。通常给定正常数 $0 < r_1 < r_2 < 1$, 定义目标函数的实际下降量 $A(\delta^{(k)})$ 与预估下降量 $P(\delta^{(k)})$ 的比值 r_k 为

$$r_k = A(\delta^{(k)}) / P(\delta^{(k)}) \quad (5)$$

当 r_k 小于 r_1 , 则扩大 μ , 如果 r_k 大于 r_2 , 则减小 μ 。换言之, 当 $x^{(k)}$ 靠近极小点 x^* 时, 期望 Levenberg-Marquardt 方法有 Gauss-Newton 法的快速收敛性, 当 $x^{(k)}$ 远离 x^* 时, 期望 Levenberg-Marquardt 有最速下降法的强适性。

Levenberg-Marquardt 法很大一部分工作便集中在 μ 值的确定上, 此时可采用信赖域法解决 μ 值的确定问题。设 $\delta^{(k)}$ 是方程组 (4) 对于某给定 μ 的解, 则 $\delta^{(k)}$ 也是下述信赖域问题的全局最优解:

$$\begin{cases} \min q_k(\delta) = \frac{1}{2} \|J_k \delta + r_k\|^2 \\ s.t. \quad \|\delta\| \leq \rho \end{cases} \quad (6)$$

由此可见, 对于一个给定的 $\mu > 0$, 方程组 (4) 的解, 也是对于 $\rho > 0$ 信赖域问题式 (6) 的解。控制参数 μ 的值以确定修正量 $\delta^{(k)}$ 的问题可以由控制参数的 ρ 值来确定, 也就是通过选取 ρ 的适当值求信赖域问题式 (6) 的解 $\delta^{(k)}$ 确定对 $x^{(k)}$ 的修正量。

Levenberg-Marquardt 法是一种局部优化搜索方法, 进行拟合计算时必须给出 (猜出) 参数的初始值, 对于式 (2) 的非线性最小二乘问题, 取初始值 $p_0 = 0.663$, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 2$, 试验数据^[5]如表 1 所示。

表 1 试验数据
Table 1 Experimental data

D	n/N	D	n/N
0	0.663 312	0.497 824	0.816 929
0.004 060	0.680 211	0.639 993	0.830 139
0.009 256	0.695 928	0.771 203	0.846 968
0.031 015	0.720 575	0.884 289	0.861 082
0.050 177	0.733 919	0.936 354	0.877 278
0.079 731	0.747 263	0.968 916	0.893 477
0.125 361	0.760 607	0.985 114	0.909 574
0.198 391	0.774 489	0.996 850	0.946 442
0.272 953	0.788 460	0.999 660	1.000 010
0.391 460	0.803 176		

拟合结果为: $p_0 = 0.6782$, $p_1 = 0.3116$, $p_2 =$

2.5055, $p_3 = 1.9417$, 残差平方和 $SSE = 0.013418$ 。同一问题在 1stOpt 中计算得到的最优解为: $p_0 = 0.6461$, $p_1 = 0.1537$, $p_2 = 1.0087$, $p_3 = 6.1208$, 残差平方和 $SSE = 0.0041485$, 相关系数 $R = 0.986412$ 。由此可见, 虽然初始参数取在可行域中, 但却得不到最优解, 初始值的选取在拟合计算过程中非常重要。

4 有限组合法

从上面的计算分析可以得出, 不用任何优化方法而任意选取参数初始值的做法是不可取的。本文提出用有限组合法 (Finite Combination Method) 来解决参数初始值的选取问题。

倒 S 型累积损伤曲线具有 4 个参数, 其中 D_0 可通过静态全应力-应变曲线直接确定, 为了曲线拟合达到最佳效果, D_0 仍然作为一个未知参数, 不过其初始值是一定的。疲劳失稳速度因子 p 的取值范围为 $[2, 8]$, 疲劳失稳比例因子 α 的取值范围为 $(0, 1 - D_0)$, 而失稳因子 β 则依赖于 α 和 p , 即 α 和 p 确定后 β 为一定值。由此可见, 倒 S 型累积损伤曲线的控制参数实际上只有 2 个: α 和 p 。而且 α 和 p 的取值范围都很窄。有限组合法根据这一特性, 将 α 和 p 两参数边界分别等分为 m , n 份, 当 m , n 不是很大时, 便能够考虑所有的组合形式, 对每一种组合实施一次 Levenberg-Marquardt 计算, 得到相应的拟合参数及拟合质量指标, 以计算结果中残差平方和最小的那一组数据作为参数的初始值。

显而易见, 有限组合法是在可行域中均匀布置 $m \times n$ 个点, 以这些点作为起始点分别实施一次 Levenberg-Marquardt 优化计算, 取残差平方和最小的一组参数, 即最优解邻域中最近一点的计算结果, 作为初始值。例如, 取 $p_0 = 0.6$, $p_2 = 6$, $p_1 = 0.04: 0.4$, $p_3 = 2: 0.6: 8$, 即 10 等分 p_1 , p_3 两参数的取值域, 其中 p_2 取任意值, 并没有作为约束条件给出。拟合结果的部分数据如表 2 所示。

表 2 有限组合法计算结果 (部分)
Table 2 Result obtained from finite combination method (Part)

D_0	α	β	p	SSE
0.678 1	0.327 4	2.858 8	1.971 9	0.012 7
0.679 1	0.429 8	4.022 8	1.867 0	0.013 2
0.677 5	0.340 2	2.919 1	1.954 7	0.012 8
0.674 9	0.192 8	1.525 9	2.334 3	0.010 8
0.677 6	0.297 7	2.375 0	1.965 7	0.013 2

计算结果表明, 在参数定义域中取 121 组初始值进行计算, 竟然没有一组收敛到最优结果, 再一次说明初始值的选取对拟合的重要影响。作者以有

限组合法计算结果中残差平方和最小的那一组数据, 即 $p_0=0.674\ 3$, $p_1=0.172\ 1$, $p_2=1.334\ 1$, $p_3=2.500\ 0$, 作为新的初始值代入 Levenberg-Marquardt 法进行计算, 得到的结果如图 4 所示, $p_0=0.646\ 1$, $p_1=0.153\ 7$, $p_2=1.008\ 7$, $p_3=6.119\ 8$, 残差平方和 $SSE=0.004\ 148$, 相关系数 $R=0.986\ 412$, 决定系数 $DC=0.973\ 009$, 计算最终收敛到最优解。作者随后在可行域中调整 p_1 和 p_3 参数的取值范围及等分数目, 试验表明, 以有限组合法估算初始值, 再用 Levenberg-Marquardt 法进行倒 S 型曲线拟合的方法总能够收敛到最优解。

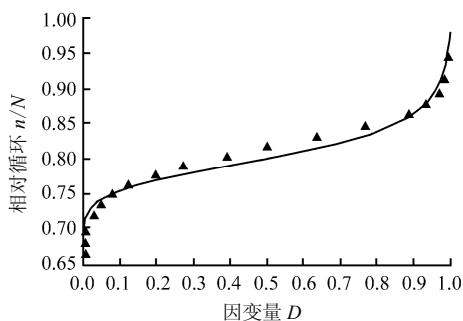


图 4 倒 S 型曲线拟合结果

Fig.4 Result of inversed S-shaped curve fitting

在曲线回归分析中, 一般以残差平方和 (SSE)、相关系数 (R) 以及决定系数 (DC) 来评价曲线拟合的效果。显而易见, SSE 越小, R 和 DC 越大时表示所配得的曲线与试验数据拟合得越好。相关系数是评价拟合曲线与试验数据相关程度的重要指标, 其取值范围为 $[0, 1]$, $R=1$ 时为完全相关, $R=0$ 时完全不相关 (随机数据)。从本文的拟合结果来看, 以有限组合法+Levenberg-Marquardt 法拟合得到的倒 S 型曲线与试验数据均为高度相关, 既说明了拟合算法的高效性, 也说明了倒 S 型模型的正确性。

5 结 语

用最小二乘法拟合非线性方程时, 若非线性方程能通过变量变换化为线性模型, 则应用线性最小二乘法可直接求得最优近似解。但变量变换一般会改变变量的取值范围, 增加数值计算的难度, 而且, 变换后计算的最优结果往往也不是真正的最优参数。因此, 对于曲线的拟合, 建议采用基于高斯-牛顿迭代原理的 Levenberg-Marquardt 方法。

Levenberg-Marquardt 法是一种局部优化搜索方法, 这一方法在很大程度上依赖于初值的选择, 如果在可行域中任意选取初值, 本文的计算结果表明, Levenberg-Marquardt 法收敛到最优解的概率很低。因此, 作者针对于岩石倒 S 型损伤累积模型的特点,

提出应用有限组合法在可行域中均匀布点, 通过 Levenberg-Marquardt 法确定最优解邻域中最靠近的一点, 并以最近点的计算结果作为第 2 阶段的初始值, 然后再实施一轮 Levenberg-Marquardt 迭代, 求解得到倒 S 型曲线的最优解。试验计算结果表明, 本文提出的有限组合法能有效地解决 Levenberg-Marquardt 法中初值的选择问题, 所配得的曲线与试验数据高度相关。

参 考 文 献

- [1] 刘保国. 岩体等效变形参数及侧压系数的非线性最小二乘法估计[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(3): 263—268.
LIU Bao-guo. The estimation of equivalent deformation parameters of rock mass and coefficient of lateral pressure using nonlinear least squares method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1996, 15(3): 263—268.
- [2] 孙文瑜, 徐成贤, 朱德通. 最优化方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 粟塔山. 最优化计算原理和算法程序设计[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.
- [4] 葛修润, 蒋宇, 卢允德, 等. 周期荷载作用下岩石疲劳变形特性试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(10): 1581—1585.
GE Xiu-run, JIANG Yu, LU Yun-de, et al. Testing study on fatigue deformation law of rock under cyclic loading[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, 22(10): 1581—1585.
- [5] 蒋宇, 葛修润, 任建喜. 岩石疲劳破坏过程中的变形规律及声发射特性[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1810—1814.
JIANG Yu, GE Xiu-run, REN Jian-xi. Deformation rules and acoustic emission characteristics of rocks in process of fatigue failure[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(11): 1810—1814.
- [6] XIAO J Q, DING D X, XU G, et al. Waveform effect on quasi-dynamic loading condition and the mechanical properties of brittle materials[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, 45 (4): 621—626.
- [7] 葛修润, 任建喜, 蒲毅彬, 等. 岩土损伤力学宏观试验研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [8] 周尚志, 党发宁, 陈厚群, 等. 岩石类材料疲劳破坏裂纹扩展分析的数值方法[J]. 岩土力学, 2008, (3): 769—774.
ZHOU Shang-zhi, DANG Fa-ning, CHEN Hou-qun, et al. Numerical method for crack extension analysis based on fatigue fracture process of rock materials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, (3): 769—774.
- [9] XIAO J Q, DING D X, XU G, et al. Inverted S-shaped model for nonlinear fatigue damage of rock [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, 46 (3): 643—648.